I PICCOLI CALCOLATORI TASCABILI

NELLA SCUOLA

Spunti didattici

Carlo Felice MANARA

Raffaella TARDINI Manara

2ª PARTE

****

6.- Nei && precedenti abbiamo incontrato alcuni procedimenti per migliorare le informazioni che si posseggono in relazione ai risultati di certe operazioni. Vogliamo dedicare qualche pagina a presentare altri procedimenti di questo tipo che, per quanto in apparenza molto particolari, possono tuttavia offrire degli spunti didattici di utilizzazione delle macchinette e di soluzione di problemi di matematica.

Presenteremo innanzitutto sommariamente la teoria dei procedimenti stessi; pensiamo invero che questi richiami possano essere utili agli insegnanti, anche se non possono essere sempre trasferiti nello insegnamento della scuola secondaria; in questa invece pensiamo che la rappresentazione geometrica dei procedimenti stessi possa costituire, come vedremo, un utile esercizio di geometria analitica, diverso da quelli che vengono abitualmente presentati dai manuali scolastici.

Supponiamo dunque che il problema da risolvere sia formulato dicendo che si cerca la soluzione di una equazione che può essere scritta nella forma:

(1) $f(x)=g(x)$

dove f e g sono due funzioni reali della variabile reale x che soddisfano *a certe ipotesi che enunceremo subito.*

Tuttavia prima osserviamo che il problema enunciato può essere considerato come la traduzione del problema geometrico che consiste nella ricerca del punto (o dei punti) comuni alle due curve rappresentate nel piano, rispetto a coordinate cartesiane ortogonali x,y dalle due equazioni

$$(2) \qquad y=f(x) \qquad ; \qquad y=g(x)$$

Siano ora a *e* b *due numeri reali e sia*

$$(3) \qquad a<b \quad ;$$

Indichiamo con I *l'insieme dei valori reali (intervallo) soddisfacenti alle condizioni*

$$(4) \qquad a<x<b$$

e si abbia :

$$(5) \qquad g(a)>f(a) \quad ; \quad g(b)<f(b).$$

In tutto l'intervallo I *le due funzioni* f *e* g *abbiano derivate prime, che indicheremo con* f' *e* g' *secondo il solito, e queste siano continue.*

Si abbia sempre in tutto l'intervallo

$$(6) \qquad f'(x)>0$$

$$(7) \qquad g'(x)<0$$

Più precisamente , supporremo che esistano tre costanti p,q,r *tali che si abbia per ogni* x *di* I *:*

$$(8) \qquad f'(x)>p>q>|g'(x)|>r>0.$$

Indichiamo ora con H *l'insieme dei valori di* y *(intervallo) soddisfacenti alle condizioni:*

$$(9) \qquad f(a)<y<f(b)$$

Da quanto abbiamo supposto per la funzione f *si trae che, per ogni* y *appartenente all'intervallo* H *, esiste la funzione inversa della* $f(x)$*; esiste cioè una funzione , che indicheremo con* $\varphi(y)$, *tale che si abbia identicamente*

$$(10) \qquad y=f(\varphi(y))$$

per ogni y *di* H, *ed anche*

$$x=\varphi(f(x)) \tag{11}$$

per ogni x di I.

Inoltre,sempre in forza delle ipotesi enunciate,per ogni valore di y appartenente all'intervallo H esiste

la derivata $\frac{d\varphi}{dy}$ che indicheremo anche con il il simbolo φ' ,ponendo quindi

$$\varphi' = \frac{d\varphi}{dy} \tag{12}$$

e si avrà , per ogni $y=f(x)$,

$$f'(x)\cdot\varphi'(y)=1 \; . \tag{13}$$

Analogamente,sempre in conseguenza delle ipotesi enunciate,esiste, per ogni y appartente all'intervallo

$$g(b) < y < g(a) \tag{9)'$$

la funzione $\psi(y)$,inversa della $g(x)$;esiste cioè una funzione $\psi(y)$ tale che sia

$$y=g(\psi(y)) \quad ; \quad x=\psi(g(x)) \tag{14}$$

Tale funzione ψ avrà una derivata $\frac{d\psi}{dy}$ che indicheremo anche con il simbolo $\psi'(y)$,ponendo quindi :

$$\psi'(y) = \frac{d\psi}{dy} , \tag{15}$$

e si avrà per ogni $y=g(x)$:

$$g'(x)\cdot\psi'(y)=1. \tag{16}$$

In conseguenza delle ipotesi,per noti teoremi di analisi matematica, esisterà nell'intervallo I un valore reale (ed uno solo) α che è radice della equazione (1),tale cioè che sia

$$f(\alpha)=g(\alpha) \quad ; \tag{17}$$

inoltre,per ogni valore x' della x soddisfacente alla limitazione

$$a < x' < \alpha \tag{18}$$

si avrà

$$g(x') > f(x') \tag{19}$$

e viceversa;e per ogni valore x'' di x soddisfacente alle limitazioni

$$\alpha < x'' < b \tag{20}$$

si avrà

$$(21) \qquad g(x'') < f(x'')$$

e viceversa.

Ovviamente, secondo le idee che abbiamo espresso nel && 2, ci interessa determinare una procedura che ci conduca a determinare degli intervalli sempre più piccoli, ciascuno contenuto nel precedente, e ciascuno contenente la radice α della equazione (1).

In questo modo miglioreremo le informazioni che abbiamo in partenza, secondo le quali sappiamo soltanto che α appartiene all' intervallo I.

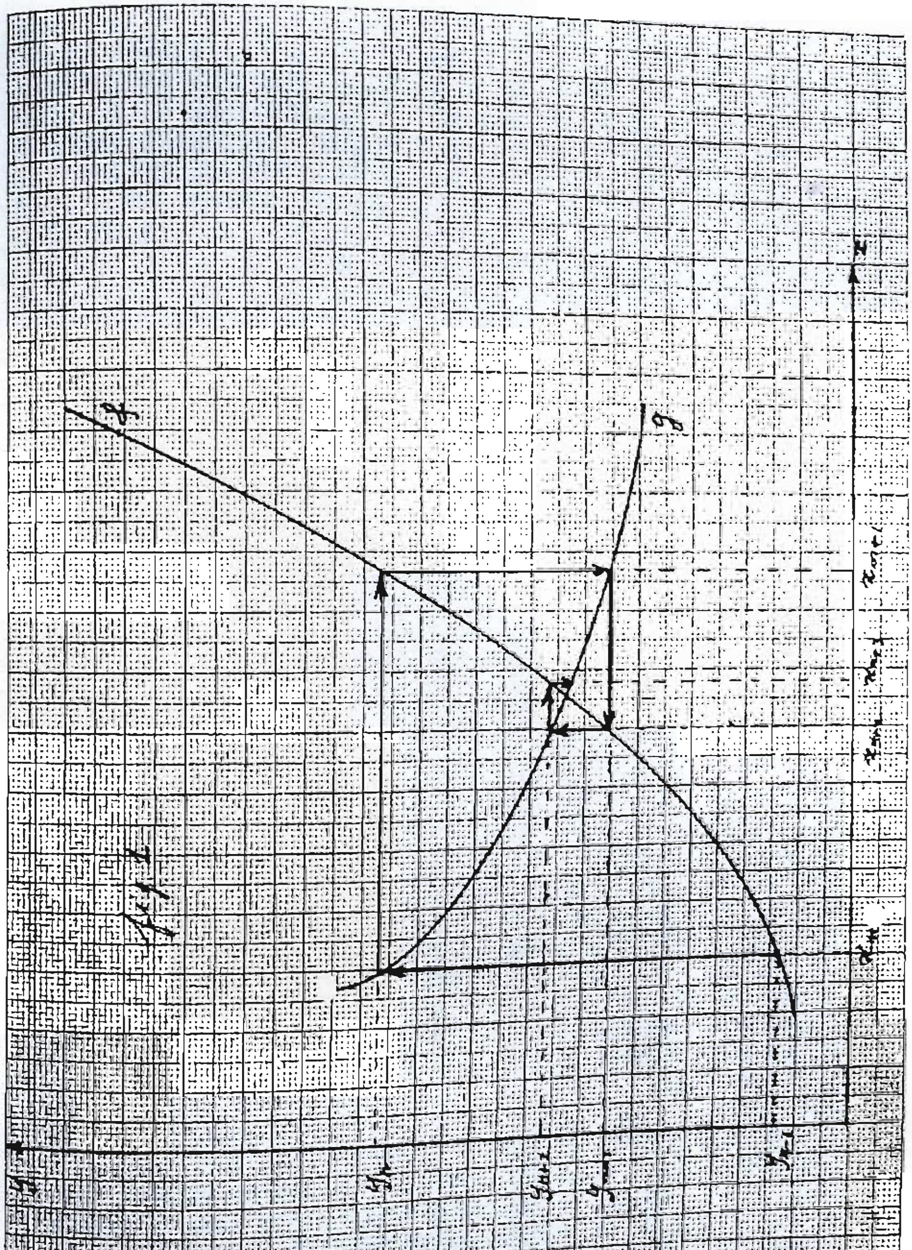
A tal fine prenderemo in considerazione la successione dei valori di x definita dalla equazione (alle **differenze finite**):

$$(22) \qquad g(x_n) = f(x_{n+1}).$$

Faremo vedere che, nelle ipotesi ammesse per le funzioni f e g, quando si scelga, per valore di partenza x_1 un valore di x appartenente all'intervallo I, la successione definita dalla (22) converge alla radice α della equazione (1), e che la convergenza avviene alternativamente con valori per difetto e per eccesso di α, in modo che si viene a determinare una successione di intervalli sempre più piccoli ai quali la radice stessa appartiene sempre.

La procedura che conduce alla costruzione della successione definita dalla (22) è illustrata geometricamente dalla annessa fig. 1, la quale mette in evidenza le caratteristiche modalità di convergenza, che viene anche chiamata convergenza "**a ragnatela**", di cui abbiamo detto or ora.

Si osserverà facilmente che la figura stessa traduce un caso particolare, quello cioè in cui la radice α della equazione (1) conduce a valori positivi delle due funzioni f e g. Tuttavia è facile convincersi del fatto che queste circostanze particolari non influiscono sulle modalità della dimostrazione, la cui validità è fondata solo sulle ipotesi e sugli sviluppi che seguono.



Poniamo ora, per n intero naturale qualunque :

$$(23)\quad \begin{cases} \cdots\cdots\cdots \\ y_{n-1} = g(x_{n-1}) = f(x_n) \\ y_n = g(x_n) = f(x_{n+1}) \\ y_{n+1} = g(x_{n+1}) = f(x_{n+2}) \\ y_{n+2} = g(x_{n+2}) = f(x_{n+3}) \\ \cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Si ha

$$(24)\quad y_{n+1} - y_n = f(x_{n+2}) - f(x_{n+1}) = f\left[\psi(y_{n+2})\right] - f\left[\psi(y_{n+1})\right].$$

Per noti teoremi di Analisi Matematica (teorema detto del **"valor medio"** *o teoremi collegati)si ha che ,sempre nelle ipotesi ammesse, esiste un reale* $\bar{\xi}$ *,compreso tra* x_{n+1} *e* x_{n+2} *tale che si abbia:*

$$(25)\quad f\left[\psi(y_{n+2})\right] - f\left[\psi(y_{n+1})\right] = \left\{\psi(y_{n+2}) - \psi(y_{n+1})\right\} \cdot f'(\bar{\xi})$$

ed ancora, sempre per i teoremi sopra ricordati, esiste un valore $\bar{\eta}$ *compreso tra* $\psi(y_{n+2})$ *e* $\psi(y_{n+1})$ *tale che sia*

$$(26)\quad \psi(y_{n+2}) - \psi(y_{n+1}) = \psi'(\eta)(y_{n+2} - y_{n+1}).$$

Si avrà quindi in definitiva :

$$(27)\quad y_{n+1} - y_n = (y_{n+2} - y_{n+1}) \cdot \psi'(\bar{\eta}) f'(\bar{\xi});$$

ed in forza delle **(7)** *e della* **(16)** *questa relazione prova che le due differenze:* $(y_{n+1} - y_n)$ *e* $(y_{n+2} - y_{n+1})$ *hanno segno opposto;quindi, se per*

$$x_n = \psi(y_n) = \varphi(y_{n-1})$$

si ha, per esempio $g(x_n) > f(x_n)$

allora per

$$x_{n+1} = \psi(y_{n+1}) = \varphi(y_n)$$

si avrà

$$g(x_{n+1}) < f(x_{n+1})$$

e viceversa.

In conseguenza delle osservazioni fatte poco fa si avrà che i due valori x_n ed x_{n+1} sono estremi di un intervallo in cui è compreso la radice α cercata. Vedremo subito che la lunghezza di questo intervallo tende a zero al crescere di n, e pertanto che la procedura di determinazione di questi intervalli conduce al miglioramento progressivo delle informazioni che si posseggono. Invero si ha

$$(28) \qquad x_{n+2}-x_{n+1} = \varphi(y_{n+1})-\varphi(y_n)= \\ = \varphi[g(x_{n+1})] - \varphi[g(x_n)].$$

In forza delle ipotesi e dei teoremi invocati poco sopra si avranno quindi due reali : ξ compreso tra x_n e x_{n+1}, η compreso tra y_n ed y_{n+1} tali che sia

$$(29) \qquad x_{n+2}-x_{n+1}=(x_{n+1}-x_n)g'(\xi)\,\varphi'(\eta).$$

In forza delle (7) e (13) si ha anche qui che le due differenze $(x_{n+2}-x_{n+1})$ ed $(x_{n+1}-x_n)$ hanno segno opposto, e si conferma ancora una volta che la successione definita dalla (22) contiene alternativamente valori per difetto e per eccesso di α ; inoltre, dalle (8) e (13) si trae che esiste una costante K soddisfacente alle condizioni :

$$(30) \qquad 0 < K < 1$$

e tale che si abbia , per ogni n :

$$(31) \qquad |x_{n+2}-x_{n+1}| < |x_{n+1}-x_n| \cdot K.$$

E questa relazione ,insieme con la (30),garantisce la convergenza della successione considerata.

E' chiaro che,come abbiamo annunciato,la dimostrazione ora svolta,o altre equivalenti,non può essere portata nella scuola secondaria; pensiamo tuttavia che l'insegnante possa trovare una soluzione di compromesso,interpretando sulla figura i significati geometrici delle ipotesi che garantiscono la validità della conclusione,e ottenendo così anche lo scopo di una esercitazione di geometria analitica che può essere utile e forse - ripetiamo - non entra negli schemi abituali degli esercizi di questo capitolo di matematica.

7. Gli sviluppi del && precedente possono essere utilmente applicati alla soluzione di alcuni problemi elementari, e possono aiutare a conseguire gli scopi di cui si diceva nella introduzione, cioè possono aiutare a dare un'idea non consueta della matematica.

Un primo esempio può essere dato dalla procedura per il calcolo della radice quadrata di un numero **N**.

Sia **N** un numero che supporremo positivo ed intero.

Sia **A** un intero che fornisce una valutazione per difetto della radice quadrata di **N**; si abbia cioè:

$$(1) \qquad A^2 < N < (A+1)^2.$$

Indicando con x la soluzione della equazione

$$(2) \qquad (A+x)^2 = N$$

si avrà quindi

$$(3) \qquad 0 < x < 1 ;$$

e, dalla (2),

$$(4) \qquad 2Ax + x^2 = N - A^2 = B.$$

Ponendo ora:

$$(5) \qquad f(x) = x \quad ; \quad g(x) = B/(2A + x)$$

la equazione (22) del && precedente diventa, in questo caso:

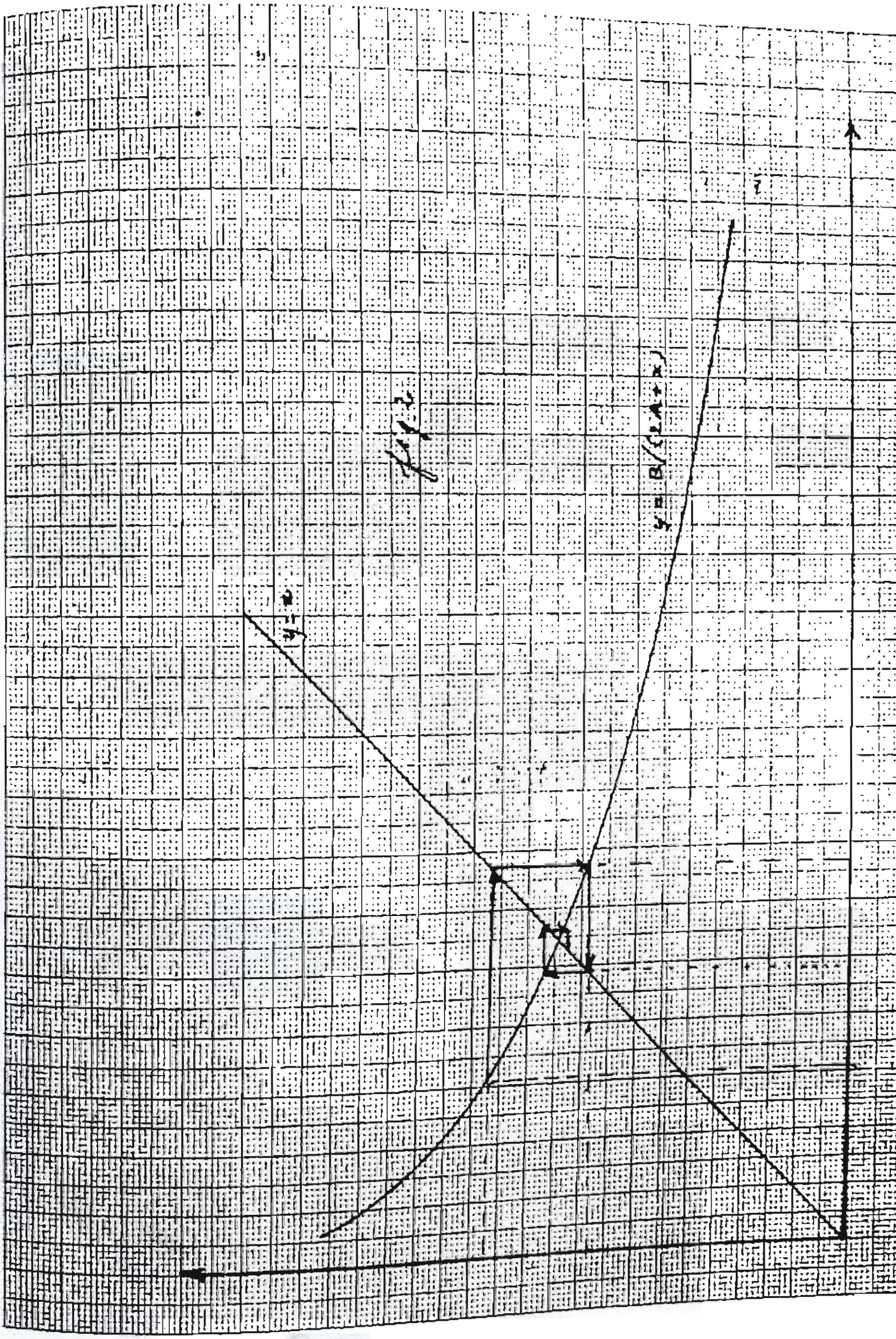
$$(6) \qquad x_{n+1} = B/(2A + x_n).$$

Si determinano facilmente, in questo caso, i valori di x per i quali le condizioni di convergenza della successione definita dalla (6) sono soddisfatte.

Il lettore può farlo ovviamente per esercizio, e far vedere, in sede didattica, il significato geometrico delle condizioni stesse (Cfr fig. 2). Qui ci limitiamo a due osservazioni: anzitutto la funzione $g(x)$ definita dalla (5) è tale che se la condizione

$$(7) \qquad |g'(x)| < 1$$

è soddisfatta per un valore $\underline{x}$ di x essa è soddisfatta pure per ogni valore di x maggiore di $\underline{x}$; in secondo luogo, conformemente a quanto già osservato nel &&2, la espressione simbolica $\sqrt{N}$ compare nella formula risolutiva


y = x

della equazione quadratica, che scriveremo nella forma tradizionale :

$$(4)' \qquad x^2 + 2Ax - B = 0$$

e che coincide con la **(4)** ; ripetiamo che tale formula risolutiva non costituisce che un rimando, con operazioni razionali, del problema di determinare la radice (o le radici) della **(7)** alla procedura (supposta nota) di calcolo del valore di $\sqrt{N}$.

Qui invece si segue la procedura diversa (ma logicamente equivalente) di risolvere direttamente la **(7)** con la successione **(6)** e di trarre da questa risoluzione un valore di **N**.

Così, per $N=30$, si può assumere $A=B=5$ e si ottiene, facendo $x_0 = 0$, la seguente successione :

$x_0 = 0$

$x_1 = 0{,}5$

$x_2 = 0{,}47619$

$x_3 = 0{,}47727$

$x_4 = 0{,}47722343$

$x_5 = 0{,}47722567$

$x_6 = 0{,}47722557$

$x_7 = 0{,}47722558$

Pertanto si può scrivere

$$5{,}47722557 < \sqrt{30} < 5{,}47722558$$

Osservazione.

La successione che abbiamo costruito a partire dalle **(6)** è convergente meno rapidamente della successione classica e ben nota, che converge a $\sqrt{N}$ partendo da un valore approssimato per eccesso ed è definita dalla formula :

$$(8) \qquad x_{n+1} = (x_n + N/x_n)/2$$

Si osservi tuttavia che questa seconda successione è monotona decrescente; pertanto l'errore, che si commette accettando un numero razionale come valore approssimato per eccesso del valore $\sqrt{N}$, si determina in modo relativamente meno facile di quanto non possa avvenire con la successione di valori sopra calcolati,per valori che - come si è detto - assegnano una successione di intervalli decrescenti,in ognuno dei quali è contenuto il numero che si cerca.

Un secondo esercizio interessante dello stesso tipo può essere escogitato cercando di approssimare l'irrazionale $\sqrt[3]{N}$ con una macchinetta che permetta soltanto il calcolo della radice quadrata.Invero in questo caso si tratta di risolvere l'equazione

$$x^3 = N \tag{9}$$

che può essere scritta nella forma :

$$x = \sqrt[2]{N/x} \tag{10}$$

Si può identificare un algoritmo del tipo di quello costruito nel && precedente ,prendendo

$$f(x)=x \quad ; \quad g(x)= \sqrt{N/x} \tag{11}$$

e costruire una successione definita dalla equazione alle differenze finite:

$$x_{n+1} = \sqrt{N/x_n} \tag{12}$$

Si verifica che le condizioni di convergenza sono soddisfatte in ogni intervallo contenuto nella semiretta definita dalla condizione

$$x > \sqrt[3]{N/2} \; ; \tag{13}$$

pertanto una valutazione approssimata del numero cercato permette di scegliere un valore di partenza che dia luogo alla convergenza della successione.

Prendendo per esempio $N=30$ ed $x_0 = 3$ si ottiene la successione seguente:

$x_0 = 3$

$x_1 = 3,16227766$

$x_2 = 3,080070288$

$x_3 = 3,120903309$

$x_4 = 3,100419577$

$x_5 = 3,110644582$

$x_6 = 3,105527871$

$x_7 = 3,108085174$

$x_8 = 3{,}106806259$

$x_9 = 3{,}107445651$

$x_{10} = 3{,}107125938$

$x_{11} = 3{,}1072855791$

$x_{12} = 3{,}107205863$

$x_{13} = 3{,}107245827$

$x_{14} = 3{,}107225845$

$x_{15} = 3{,}107235836$

Pertanto potremo scrivere :

$$3{,}10722 < \sqrt[3]{30} < 3{,}10723$$

Anche in questo caso, come in quello precedente, potremmo osservare che la successione definita dalla **(12)** *non è la sola che ammette* $\sqrt[3]{N}$ *come limite (sotto determinate condizioni). Si può per esempio scrivere la* **(9)** *sotto la forma*

$$(13) \qquad x^4 = x\,N$$

e pertanto costruire la successione definita dalla equazione alle differenze finite

$$(14) \qquad x_{n+1} = \sqrt{\sqrt{N\,x_n}}$$

Tuttavia è facile constatare che la successione così definita è monotona; crescente se si parte da un valore approssimato per difetto, decrescente se si parte da un valore approssimato per eccesso; quindi per la determinazione dell'errore che si commette si possono ripetere le considerazioni che già abbiamo svolto in relazione all'esempio precedente.

Comunque, anche la utilizzazione della successione così definita potrà costituire uno spunto didattico forse interessante per l'insegnante che sappia sfruttarlo.

8. Abbiamo osservato che il procedimento esposto nel && 6 può apparire molto particolare;esso tuttavia può essere applicato a molti interessanti problemi di geometria e di algebra.Daremo nel presente && un esempio di applicazione del procedimento esposto ad un problema geometrico classico,che -come è noto- non ammette la risoluzione con riga e compasso :precisamente ci proponiamo di calcolare le funzione trigonometriche dell'angolo di 360°/7,che è l'angolo al centro del poligono convesso regolare di 7 lati.

La impostazione della equazione algebrica relativa a questo problema richiede soltanto la conoscenza della trigonometria elementare. Poniamo infatti:

$$\alpha = 360°/7$$

e sia

$$x=\cos\alpha \tag{1}$$

le formule di addizione danno

$$\cos 3\alpha = 4x^3 - 3x \tag{2}$$

le formule di duplicazione danno

$$\cos 4\alpha = 8x^4 - 8x^2 + 1 \ . \tag{3}$$

Nella ipotesi che α abbia il valore cercato i due valori dati dalle formule precedenti coincidono (Cfr fig 3);si avrà quindi l'equazione :

$$8x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 3x + 1 = 0 \ . \tag{4}$$

Questa equazione ha la radice banale $x=1$.

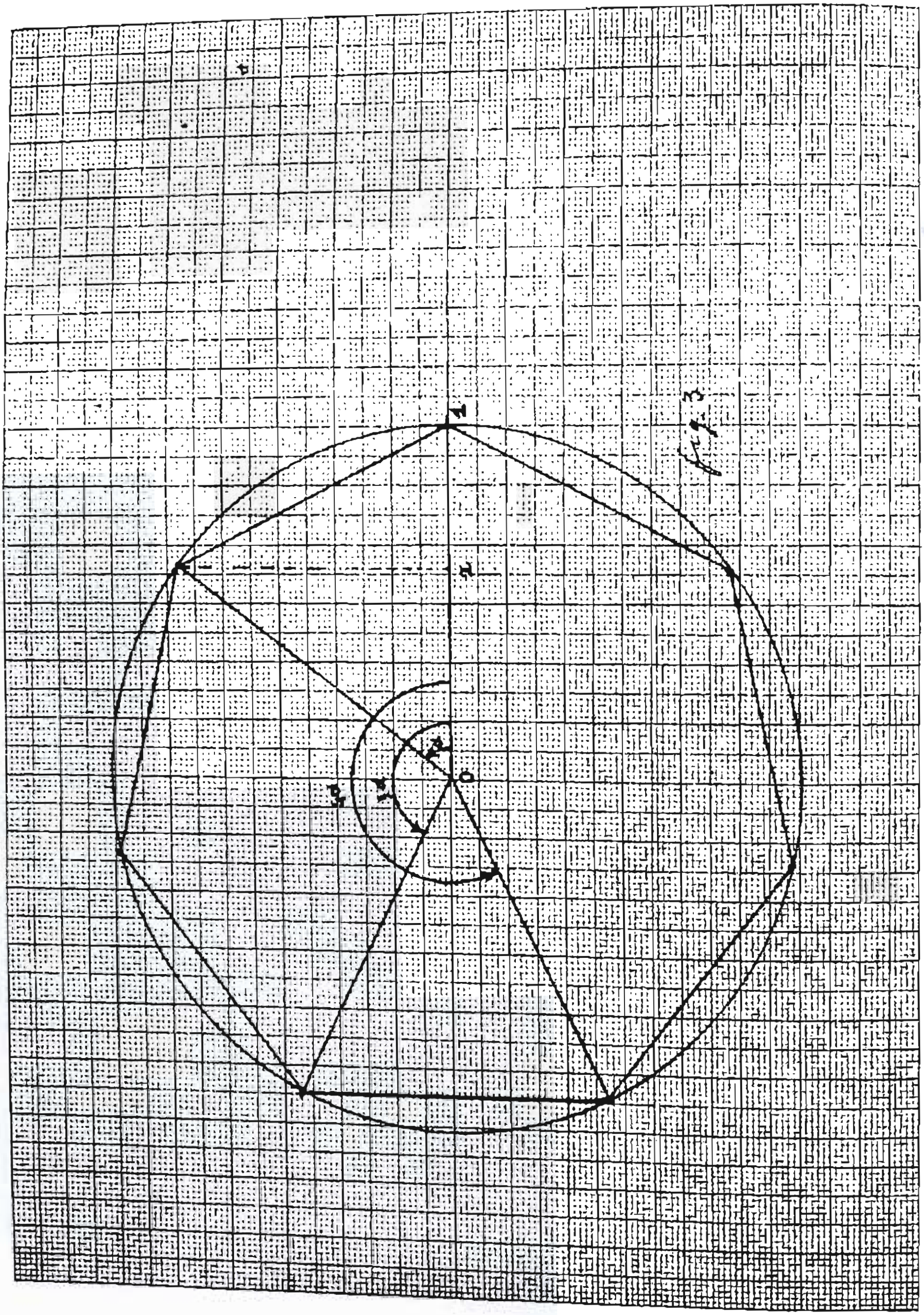
Liberata l'equazione da questa radice si ottiene :

$$8x^3 + 4x^2 - 4x - 1 = 0 \ . \tag{5}$$

Questa ha certamente una radice positiva,come si accerta analizzando il comportamento della funzione razionale intera di x che è al primo membro della equazione stessa.Poniamo ora :

$$y = 2x \tag{6}$$

sostituendo nella (5) si ottiene :



(7) $$y^3 + y^2 - 2y - 1 = 0$$

Ponendo nella (7)

(8) $$y = z - 1/3$$

si ottiene

(9) $$27\, z^3 - 63\, z - 7 = 0$$

ed infine ponendo

(10) $$u = 3z$$

si arriva alla equazione

(11) $$u^3 - 21u - 7 = 0.$$

Questa equazione può essere scritta nella forma:

(12) $$u^2 = 21 + 7/u$$

e ciò suggerisce di costruire la successione definita dalla equazione alle differenze finite

(13) $$u_{n+1} = \sqrt{21 + 7/u_n}$$

Partendo da un valore per eccesso della radice della (11), e ponendo per esempio $u_0 = 5$ si ottiene, con l'algoritmo esposto nel & 6:

$$4{,}74093881 < u < 4{,}74093882$$

e tenendo conto delle (10), (8), (6), si ottiene per la radice positiva della equazione (5) l'intervallo:

(14) $$0{,}6234898 < x < 0{,}6234899\ .$$

Per altri problemi le cui soluzioni si possono approssimare con le macchinette, e offrono quindi degli spunti molto interessanti per la didattica, rimandiamo all'articolo di P. Canetta, comparso sul n. 2 (aprile) 1982 di questa stessa rivista, in cui si espone il procedimento semplicissimo (attribuito al cardinale Niccolò Cusano) per approssimare il valore di pi greco con strumenti elementari di calcolo e procedure del tipo di quelle da noi qui esposte.